数理解析研究所講究録
279巻 1976年 20-24

Le problème de Cauchy à Caractéristiques Multiples

-Méthode directe de trouver la condition (généralisée) de E.E.Levi-

par

Yujiro OHYA

Récemment Menikoff [(4)] a étendu le résultat dû à Oleinik [(8)] pour le problème de Cauchy dans les équations différentielles du second ordre faiblement hyperboliques aux équations d'ordre supérieur. Mais il ne sera pas facile de traiter les équations dont les racines caractéristiques ont la multiplicité plus grande que double, compte tenu de ces méthodes assez compliquées. Cet article propose une méthode plus directe de trouver la condition suffisante pour que le problème de Cauchy dans les équations aux dérivées partielles hyperboliques d'ordre m avec la multiplicité variable soit bien posé dans la classe des fonctions indéfiniment différentiables.

NOTATIONS.- On considère le problème de Cauchy dans une bande $\Omega=[0,T]\times R^{\ell}$;

$$\text{(E)}\quad P(t,x;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x})u(t,x)=f(t,x)\ ,\quad (\frac{\partial}{\partial t})^{j}u(0,x)=\phi_j(x)\quad 0\leqq j\leqq m-1\ ,$$

où $P=(\frac{\partial}{\partial t})^m+\sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j}(t,x;\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t})^j$, a_{m-j} étant l'opérateur différentiel d'ordre m-j. Soit $p_m(t,x;\tau,\xi)$ le polynôme caractéristique de P; on dira que P est *hyperbolique,* si $p_m(t,x;\tau,\xi)$ se factorise dans la classe des fonctions C^∞, et si les racines caractéristiques par rapport à τ sont réelles pour $(t,x;\xi)\in\Omega\times R^{\ell}_{\xi}\backslash 0$; plus précisément, dans $p_m(t,x;\tau,\xi)=\prod_{i=1}^{m}(\tau-\lambda_i(t,x;\xi))$, $\lambda_i(t,x;\xi)$ peuvent être regardées comme les symboles de S^1 (voir Nirenberg [(6)]).

DEFINITIONS.- Pour s réel quelconque, on définit

$$\| u\|_s=\{\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\}^{1/2}\quad \text{pour } u\in C_0^\infty(R^{\ell}),$$

où $\hat{u}(\xi)$ est la transformée de Fourier; on désigne $H_s(R^{\ell})$ le complété de $C_0^\infty(R^{\ell})$ (ou bien $\mathcal{S}(R^{\ell})$) par cette norme. L'ordre m des opérateurs pseudo-différentiels sera noté par L(m); c'est-à-dire, en notant $D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$,

$D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, si $P(x,D)$ appartient à $L(m)$, alors il existe une constante C telle que $\| Pu \|_s \leqq C \| u \|_{s+m}$.

Dans la suite, on ne considère que les opérateurs pseudo-différentiels en x et différentiels en t; par exemple, si $P(t,x;D_t,D) = \sum_{j=0}^{m} a_{m-j}(t,x;D)D_t^j$, où $a_{m-j}(t,x;D)$ est l'opérateur pseudo-différentiel en x d'ordre m-j, alors on a $\| Pu(t) \|_s \leqq C \sum_{j=0}^{m} \| D_t^j u(t) \|_{m-j+s}$. Or la définition $\| D^m u(t) \|_s \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{0\leqq j \leqq m} \| D_t^j u(t) \|_{m-j}$ entraîne que $\| Pu(t) \|_s \leqq \text{const.} \| D^m u(t) \|_s$; on désigne l'ordre m des opérateurs de ce type par $\tilde{L}(m)$.

HISTORIQUES.- Supposons la factorisation $P_m = \prod_{i=1}^{p} a_{m_i}^{(i)}(t,x;\tau,\xi)$, $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, où $a_{m_i}^{(i)}(t,x;\tau,\xi)$ sont les polynômes strictement hyperboliques de degré m_i ; si l'on associe $A_i \in \tilde{L}(m_i)$ aux $a_{m_i}^{(i)}$

$$A_i(t,x;D_t,D) \sim a_{m_i}^{(i)}(t,x;\tau,\xi) + a_{m_i-1}^{(i)} + \cdots\cdots \text{ ,alors on aura}$$

$P-A_1A_2\cdots\cdots A_p \in \tilde{L}(m-p+q)$ en général où $0\leqq q \leqq p-1$. Ceci a été discuté sous l'hypothèse de la multiplicité constante dans Leray-Ohya[2]; de plus, le choix convenant des symboles de degré inférieur pour A_i permet de constater $P-A_1A_2\cdots\cdots A_p \in \tilde{L}(m-p)$. Or, le problème de Cauchy est bien posé dans la classe C^∞. Mizohata-Ohya[5] a obtenu la condition (d'après E.E.Levi[3]) suffisante et nécessaire sous l'hypothèse de la multiplicité constante et double. Dans cette Note, on ne suppose plus que la multiplicité soit constante, et on ne traite que le cas à caractéristiques doubles.

Soit $\mathfrak{p}_m(t,x;\tau,\xi) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau-\lambda_i(t,x;\xi)) \prod_{j=1}^{s} (\tau-\mu_j(t,x;\xi))$ pour $m\geqq 2s$, où $\lambda_j(t,x;\xi)$ et $\mu_j(t,x;\xi)$ peuvent coïncider pour chaque j $(1\leqq j \leqq s)$, mais $\{\lambda_i\}_{1\leqq i\leqq m-s}$ et $\{\mu_j\}_{1\leqq j\leqq s}$ sont distinctes parmi elles pour $(t,x;\xi) \in C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$; on associe $Q(t,x;D_t,D)$, $R(t,x;D_t,D)$ les opérateurs pseudo-différentiels de $\tilde{L}(m-s)$, $\tilde{L}(s)$ ayant les symboles principaux

$$q_{m-s}(t,x;\tau,\xi) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau-\lambda_i), \quad r_s(t,x;\tau,\xi) = \prod_{j=1}^{s} (\tau-\mu_j)$$ respectivement;

c'est-à-dire, on a

$$Q \sim q_{m-s} + \frac{1}{i} q_{m-s-1} + \cdots\cdots , \quad R \sim r_s + \frac{1}{i} r_{s-1} + \cdots\cdots ,$$

où q_j et r_j sont des fonctions $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ homogènes en (τ,ξ) et polynômes en τ de degré j; on définit $L_{m-1}(t,x;\tau,\xi) = p_{m-1} - i \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha} D_{x_\alpha} r_s$.

CONDITIONS.- D'abord, on va supposer

[I] $L_{m-1}(t,x;\mu_j(t,x;\xi),\xi)/\mu_j-\lambda_j$ appartient à $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ pour $1\leq j\leq s$,

[I]' $L_{m-1}(t,x;\lambda_j(t,x;\xi),\xi)/\lambda_j-\mu_j$ appartient à $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ pour $1\leq j\leq s$:

En particulier, si $\mu_j-\lambda_j/t$ est une fonction $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$, alors [I] et [I]' seront trop fortes; donc on suppose

[II] $L_{m-1}(t,x;\mu_j,\xi)/ \frac{\mu_j-\lambda_j}{t}$ appartient à $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ pour $1\leq j\leq s$,

[II]' $L_{m-1}(t,x;\lambda_j,\xi)/ \frac{\lambda_j-\mu_j}{t}$ appartient à $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ pour $1\leq j\leq s$:

Note.- Conditions [I] et [I]' (resp. [II] et [II]') sont équivalentes; en effet, on aura $L_{m-1}(\mu_j) = L_{m-1}(\lambda_j) + (\mu_j-\lambda_j) \frac{\partial L_{m-1}}{\partial \tau} (\tilde{\lambda}_j)$ par la formule de la moyenne.

Proposition I.- Sous la condition [I], on peut déterminer complètement deux fonctions $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ homogènes en (τ,ξ) (polynômes en τ) q_{m-s-1} et r_{s-1} telles que l'on a $P-QR \in \tilde{L}(m-2)$.

Proposition II .- Sous la condition [II] , on peut déterminer complètement deux fonctions $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ homogènes en (τ,ξ) (polynômes en τ) $\tilde{q}_{m-s-1}$ et $\tilde{r}_{s-1}$ telles que l'on a $P-QR \in \tilde{L}(m-2)$, et que $q_{m-s-1} = \frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}$ et

$$r_{s-1} = \frac{\tilde{r}_{s-1}}{t} .$$

En effet, compte tenu de la formule du produit des opérateurs pseudo-différentiels, on a

$$P - QR \sim p_m - q_{m-s} r_s + \frac{1}{i} p_{m-1} - \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha} D_{x_\alpha} r_s - \frac{1}{i} q_{m-s-1} r_s - \frac{1}{i} q_{m-s} r_{s-1} +$$

+ symboles de degré $\leqq$ m-2; donc il suffit de choisir (q_{m-s-1}, r_{s-1})

tels que $L_{m-1}(t,x;\tau,\xi) = q_{m-s-1} r_s + q_{m-s} r_{s-1}$ pour constater $P-QR \in \tilde{L}(m-2)$.

Cette possibilité s'obtient de

$$\sum_{\alpha=0}^{s-1} \alpha_i(t,x;\xi)\mu_j^{s-1-j} = \frac{L_{m-1}(\mu_j)}{(\mu_j-\lambda_j) \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-s} (\mu_j-\lambda_i)}$$ pour $1 \leqq j \leqq s$, puisque

$r_{s-1}(t,x;\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i(t,x;\xi)\tau^{s-1-i}$, où $\alpha_i(t,x;\xi)$ $(0 \leqq i \leqq s-1)$ sont des fonctions $C^\infty(\Omega\times R_\xi^\ell\backslash 0)$ homogènes en ξ de degré i; ces égalités déterminent les $\alpha_i(t,x;\xi)$, car le déterminant de matrice $\{\mu_j^{s-i}\}_{1\leqq i,j\leqq s}$ est $\prod_{i>j} (\mu_i-\mu_j) \neq 0$. Le même raisonnement prouve la Proposition II .

THEOREME I.- *Sous la condition* [I], *on a l'inégalité d'énergie pour le problème de Cauchy* (E)

$$\| D^{n+m-2}u(t) \| \leqq C \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \| \phi_j \|_{m-j+n-2} + \sum_{i=0}^{n-2} \| D_t^i f(0) \|_{n-2-i} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \| D^n f(s) \| \, ds \right\}$$, n *étant un entier non négatif.*

THEOREME II .- *Sous la condition* [II] , *on a l'inégalité d'énergie pour le problème de Cauchy* (E), n *étant un entier non négatif,*

$$\| D^{n+m-2}u(t) \|^2 \leqq C \{ \sum_{j=0}^{m-1} \| \phi_j \|^2_{m-j+N+n+m} + \sum_{i=0}^{N} \| D_t^i f(0) \|^2_{N-i+n+m} +$$

$$+ \int_0^t \| D^n (D_s^{N+1} f(s) \|^2 ds \} , \quad \textit{où } N = 2n+(m-s-1).$$

Note.- Etant données $f(t,x)$ et $\{\phi_j(x)\}_{0\leq j\leq m-1}$ les fonctions C^∞ à support compact par rapport à x, les Théorèmes d'existence de solution du problème de Cauchy (E) s'achèveront par la méthode habituelle.

Note.- Il semble que Petkov[(1)] énonce le résultat analogue au Théorème I.

Les démonstrations complètes des Théorèmes I et II seront publiées dans l'article ultérieur qui contiendra les études sur l'existence du domaine d'influence et aussi celles du cas de la mulitiplicité plus générale.

Références

(1) Petkov Exposés, Univ. Paris VI , 1975

(2) Leray-Ohya C.B.R.M., 1964 & Math. Ann., 1967

(3) E.E.Levi Ann. Mat., 1909

(4) Menikoff Jour. A.M.S., 1975

(5) Mizohata-Ohya Publ. R.I.M.S., 1968 & Jap. Jour. Math., 1971

(6) Nirenberg Regional Conf. P.D.E.(A.M.S.), 1972

(7) Ohya C.P.A.M., 1972

(8) Oleinik C.P.A.M., 1970

Section de Mathématique et
Physique Appliquées,
Faculté des Sciences Techniques,
Université de Kyoto,
606 Kyoto, JAPON.